



BRITISH
PATHÉ

TACOMA BRIDGE COLLAPSE

PATHE GAZETTE

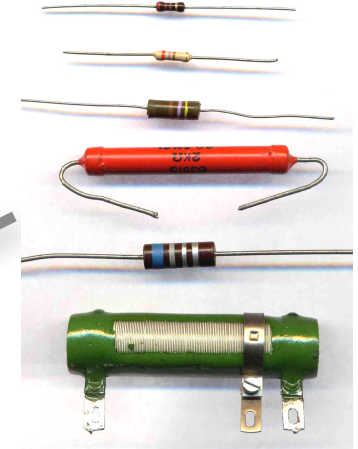
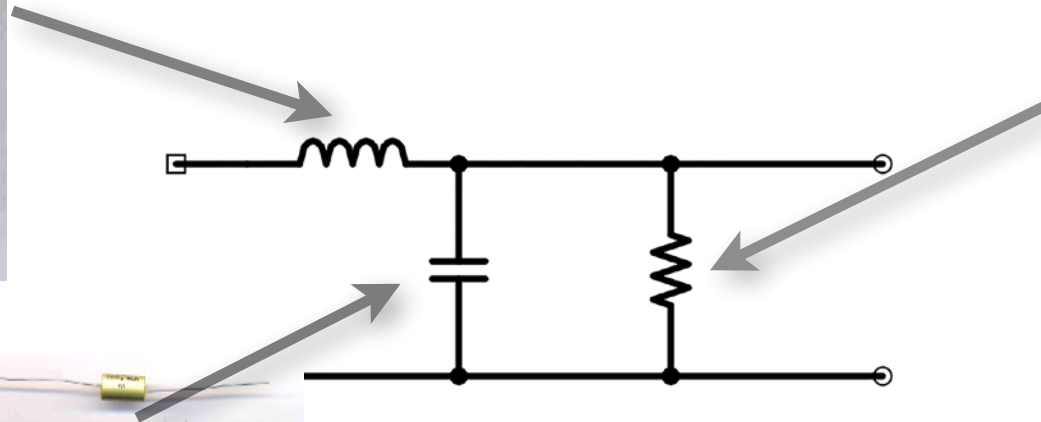
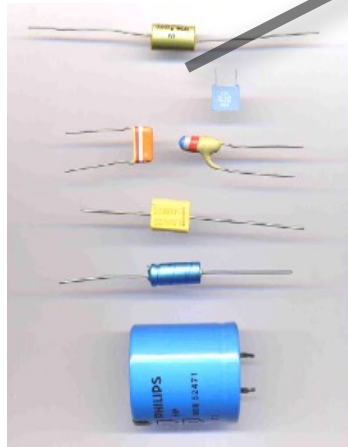
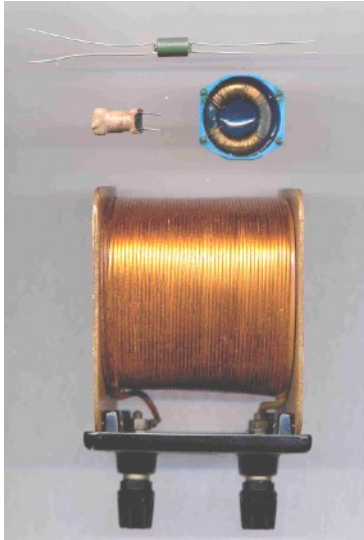
CIRCUITS I

CIRCUITS ELECTRIQUES (RCL)

OSCILLATEUR HARMONIQUE

EPFL

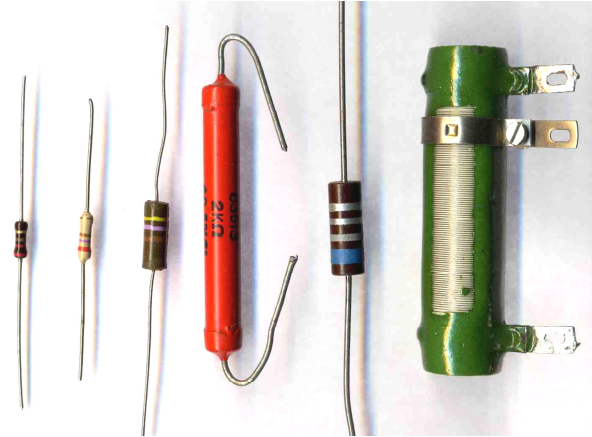
D. Mari



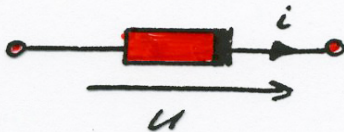
EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Equation constitutive

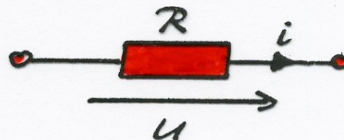
$$f(u, i) = 0$$



Résistances



Résistance linéaire :



$$u = f(i)$$

u = le voltage ou tension
[volt = V]

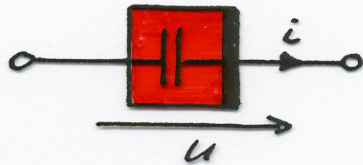
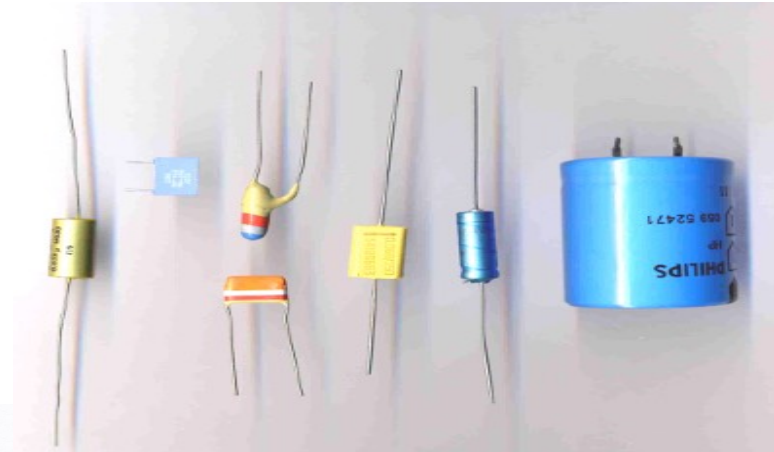
i = le courant [ampere = A]

$$u = R \cdot i$$

R = la résistance [ohm = Ω]

EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Condensateurs

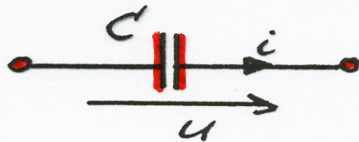


q = la charge électrique [coulomb = C].

$$q = f(u) \text{ avec } i = \frac{dq}{dt}$$

Capacités linéaires:

$$q = C \cdot u \Rightarrow \frac{dq}{dt} = i = C \frac{du}{dt}$$

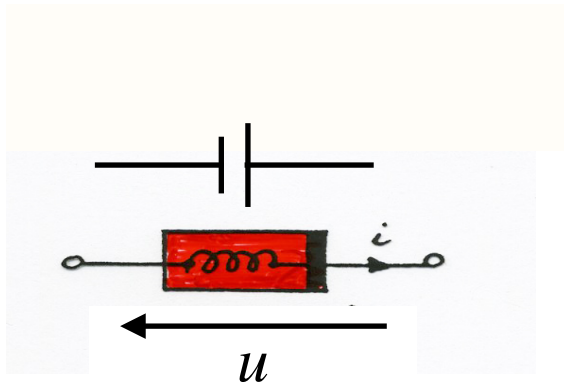
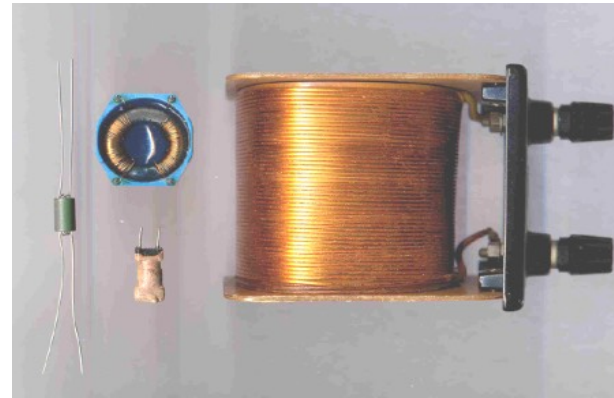


$$i = C \frac{du}{dt}$$

C = capacité [farad = F]

EQUATIONS CONSTITUTIVES DES ELEMENTS PASSIFS

Inductances



ϕ = le flux magnétique [weber = Wb]

$$\phi = f(i) \text{ avec } u = - \frac{d\phi}{dt}$$

Inductance linéaire:

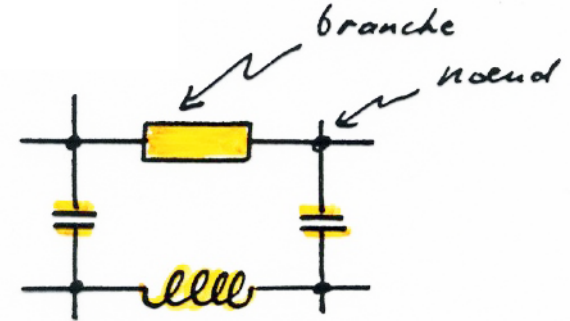
$$\phi = L \cdot i \quad \Rightarrow \quad - \frac{d\phi}{dt} = u = - L \frac{di}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

L = Inductance [henry = H]

EQUATIONS DE KIRCHHOFF D'UN RESEAU

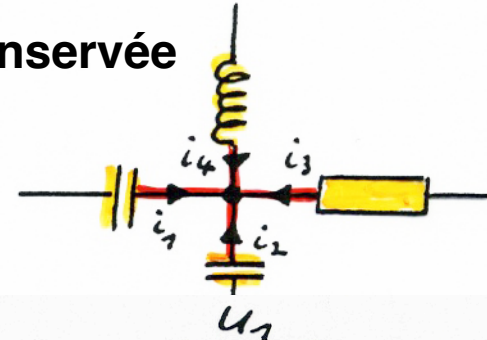
Soit un circuit électrique composé d'éléments passifs constituant les *branches du réseau* et reliés entre eux aux *noeuds du réseau*



Pour étudier le comportement électrique d'un tel réseau, on doit faire appel aux équations de Kirchhoff:

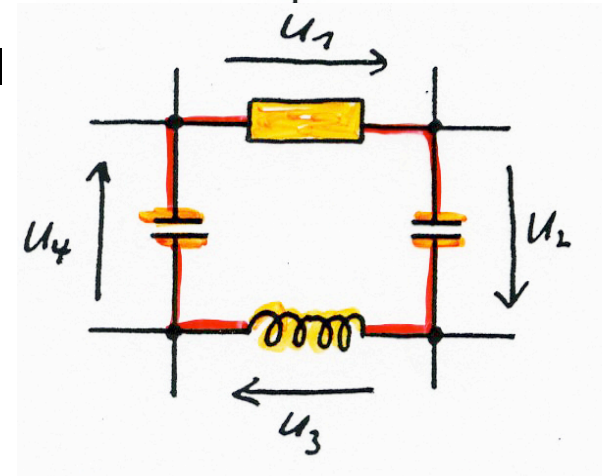
Noeuds le courant électrique est une grandeur conservée

$$\sum_{nodes} i_n = 0$$

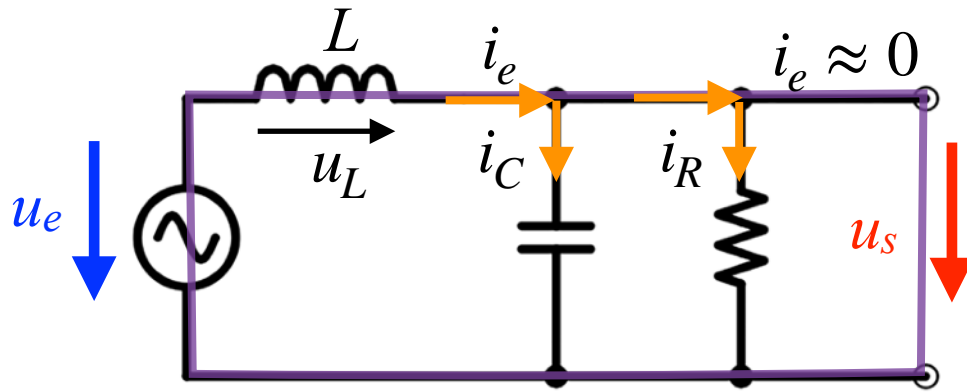


Mailles la tension électrique est un potentiel

$$\sum_{Mailles} u_n = 0$$



EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU CIRCUIT RCL



$$u_L + u_s = u_e \quad 1)$$

$$i_e = i_R + i_C \quad 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_L = L \frac{di_e}{dt} & 3) \\ u_s = R i_R & 4) \\ i_C = C \frac{du_s}{dt} & 5) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{équations} \\ \text{constitutives} \end{array}$$

$$1) + 3) \Rightarrow L \frac{di_e}{dt} + u_s = u_e$$

$$2) \Rightarrow L \left(\frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} \right) + u_s = u_e$$

$$4) + 5) \Rightarrow \frac{L}{R} \frac{du_s}{dt} + LC \frac{d^2 u_s}{dt^2} + u_s = u_e$$

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{1}{LC} u_e$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU CIRCUIT RCL

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{1}{LC} u_e$$

Introduisons alors les grandeurs définies comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda = \frac{1}{2RC} & \text{coefficient d'amortissement} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} & \text{pulsation propre du circuit} \end{array} \right.$$

Grâce à ces nouveaux paramètres, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme suivante:

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e$$

On obtient "*l'équation de l'oscillateur harmonique amorti*".

Toute équation différentielle de ce type possède une solution qui est la somme:

- **d'une solution transitoire** correspondant à la réponse transitoire de la sortie $u_s(t)$, et calculée comme la solution de l'équation différentielle sans second membre (avec $u_e = 0$),
- **d'une solution permanente** (solution particulière) correspondant à la réponse permanente $u_s(t)$ à une entrée $u_e(t)$ donnée.

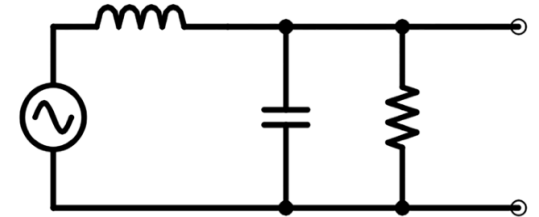
SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e$$

Signal d'entrée continu

$$u_e(t) = u_{eo} \Rightarrow$$

$$u_s(t) = u_{eo}$$



Signal d'entrée harmonique

$$u_e(t) = u_{eo} \sin(\Omega t) \quad \text{où } \Omega = \text{pulsation du signal appliqué}$$

$\Rightarrow$

$$u_s(t) = u_{so}(\Omega) \sin(\Omega t - \psi)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \arctan \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\ u_{so}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 u_{eo}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \end{array} \right.$$

$$\lambda = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)

$$\psi = \arctan \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

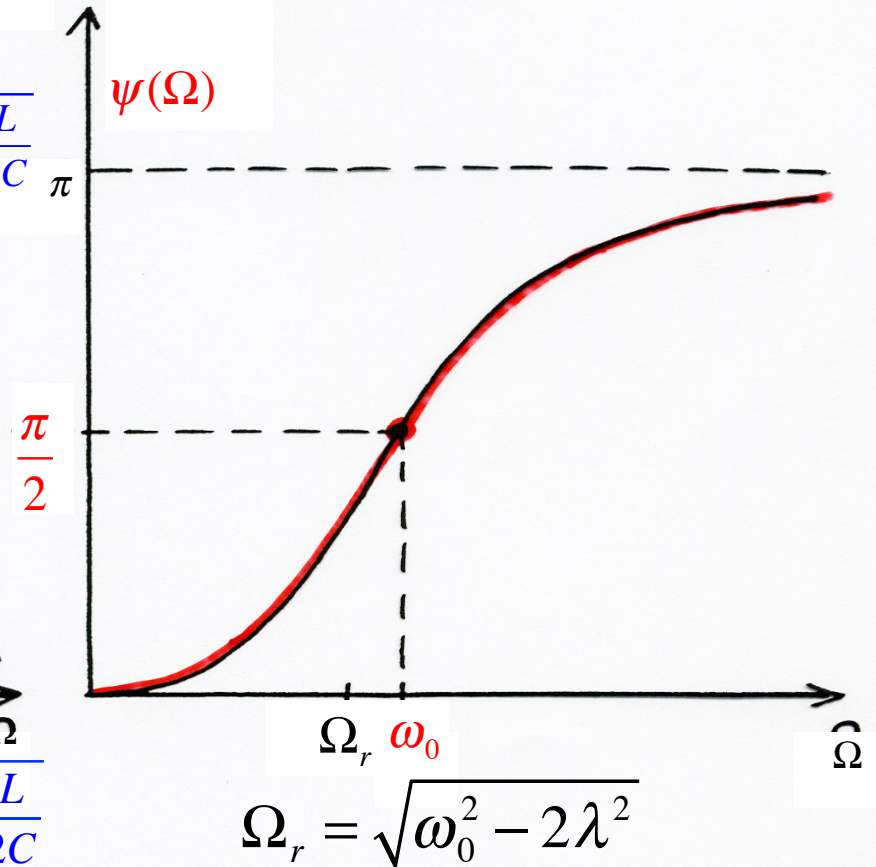
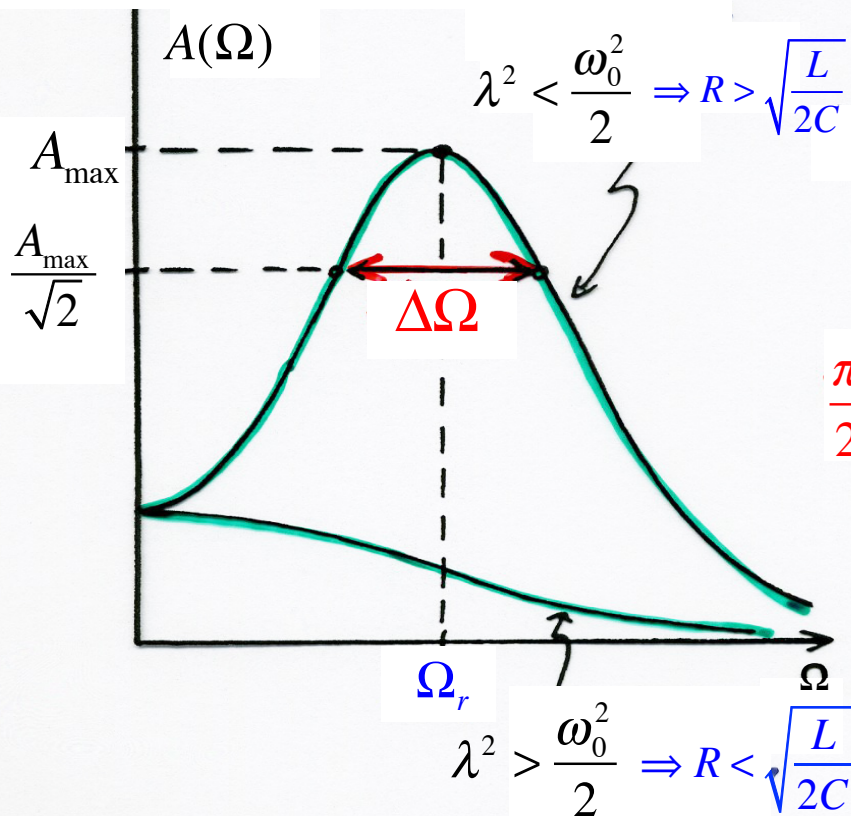
$$\lambda = \frac{1}{2RC}$$

Gain A :

$$A(\Omega) = \frac{u_{so}(\Omega)}{u_{eo}}$$

$$u_{so}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 u_{eo}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



SOLUTIONS PERMANENTES (oscillations forcées)

Pour l'amortissement faible, l'amplitude $A(\Omega)$ passe par un maximum pour $\Omega = \Omega_r$ tel que

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (\text{fréquence angulaire de résonance})$$

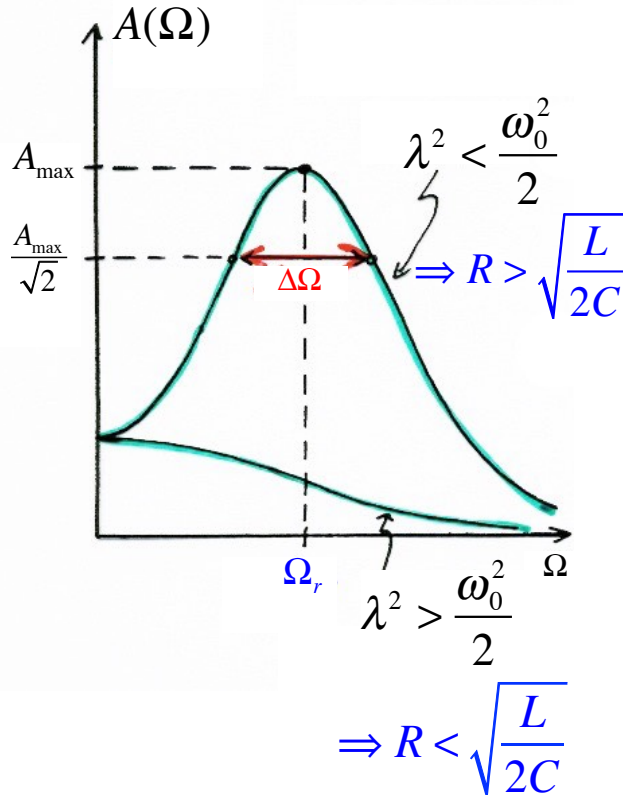
On parle alors d'un **phénomène de résonance**, et la **largeur de résonance** $\Delta\Omega$, mesurée pour $A(\Omega) = A_{\max} / 2^{1/2}$, vaut:

$$\Delta\Omega = 2\lambda\omega / \Omega_r \quad (\text{largeur de bande, bande passante})$$

On peut encore introduire la notion de **facteur de qualité Q** du circuit, défini par la relation

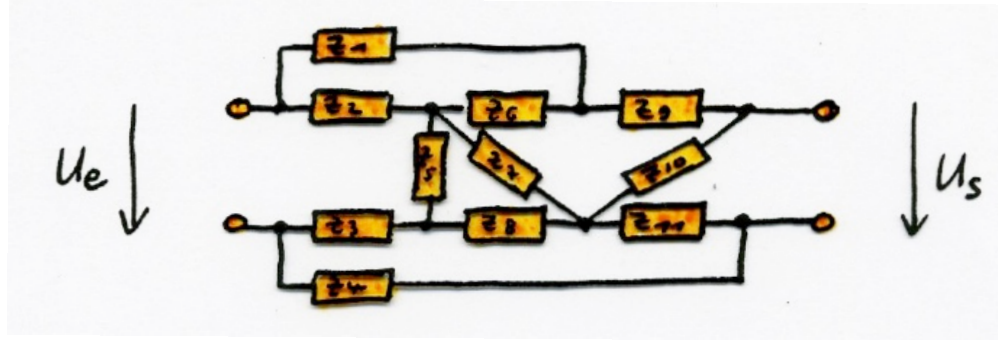
$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r^2}{2\lambda\omega} \quad (\text{facteur de qualité, coefficient de surtension})$$

Q mesure en fait l'**acuité de résonance** ou **sélectivité** du circuit résonnant.

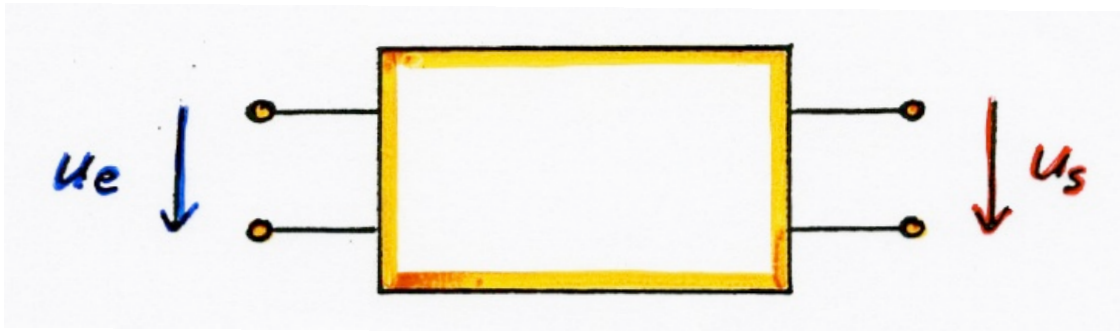


QUADRIPOLES

Soit un réseau compliqué qu'on appelle **un quadripôle**, de par l'existence de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie:



Un tel réseau peut être représenté par la "boîte noire" suivante :



Si on impose une tension d'entrée $u_e(t)$, la sortie $u_s(t)$ sera appelée **la réponse** du quadripôle.

REPONSE CONTINUE DES QUADRIPOLES

Si le réseau est constitué de résistances, de condensateurs et de selfs, ce sont uniquement les résistances qui fixeront la tension de sortie (self = court-circuit, condensateur = circuit ouvert), d'où

$$u_e(t) = \textit{constant}$$



$$u_s(t) = \textit{constant}$$

En réponse continue, on appelle **gain A du circuit quadripôle** la grandeur:

$$A = \frac{u_s}{u_e}$$

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES

Si l'on impose la tension d'entrée harmonique, la réponse, *dans le cas où le circuit est linéaire*, est du type

$$u_e = u_{eo} \sin(\omega t)$$



$$u_s = u_{so} \sin(\omega t + \varphi)$$

Cette réponse peut être caractérisée par **la fonction de transfert du quadripôle**. Cette fonction de transfert joue un rôle très important en électronique (amplificateurs, filtres, réglages automatiques, etc.).

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES

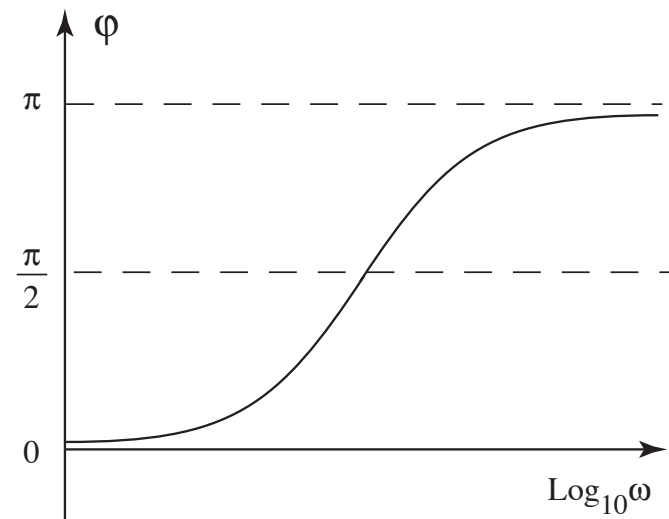
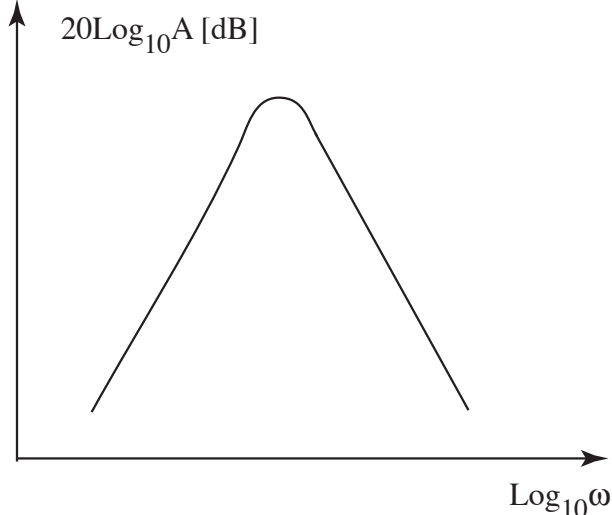
Représentation réelle de la fonction de transfert: le diagramme de Bode

La représentation réelle de la fonction de transfert fait appel aux gain A et à la phase respectivement, donnés en fonction de la fréquence du signal d'entrée:

$$A(\omega) = \frac{u_{so}(\omega)}{u_{eo}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{phase of } u_s/u_e$$

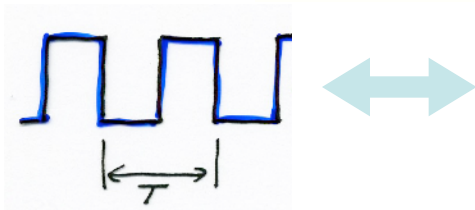
En général, on représente graphiquement $20 \log_{10} A$ dans un diagramme en fonction du logarithme de la pulsation. Un tel diagramme, appelé *diagramme de Bode*, a l'avantage de présenter en général des droites. On exprime la pente de ces droites en dB/octave, un octave correspondant à un doublement de la fréquence.



REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES: LA TRANSFORMEE DE FOURIER (facultatif)

Lorsqu'on recherche la réponse d'un circuit quadripôle à un signal périodique quelconque (signal carré, triangulaire, etc.), on peut employer la transformation de Fourier, qui est basée sur la propriété mathématique suivante:

Tout signal périodique de période T peut être décomposé **en somme de sinus et cosinus aux fréquences harmoniques** de la fréquence de base du signal, sous la forme

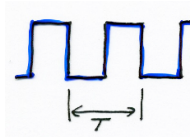


$$u_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Les coefficients a_n et b_n se calculent par les intégrales suivantes:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_e(t) \cos(n\omega t) dt \quad n = 0, \dots, \infty$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_e(t) \sin(n\omega t) dt \quad n = 1, \dots, \infty$$

REPONSE HARMONIQUE DES QUADRIPOLES: LA TRANSFORMEE DE FOURIER

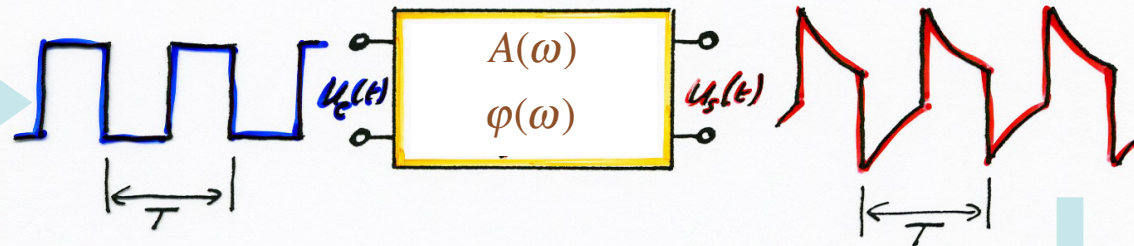


$$u_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

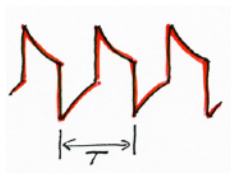
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_e(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_e(t) \sin(n\omega t) dt$$

Si le signal **u_e(t)** est appliqué à un quadripôle avec une fonction de transfert connue



La réponse **u_s(t)** sera simplement donnée par:

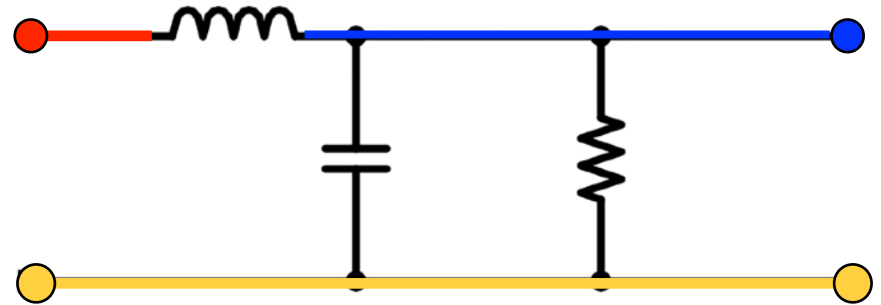
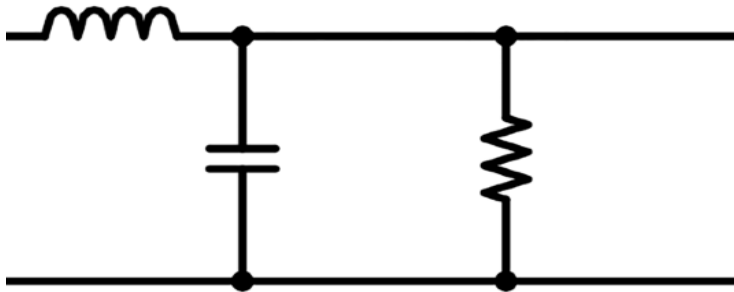


$$u_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A(n\omega) \cos(n\omega t + \varphi(n\omega))$$

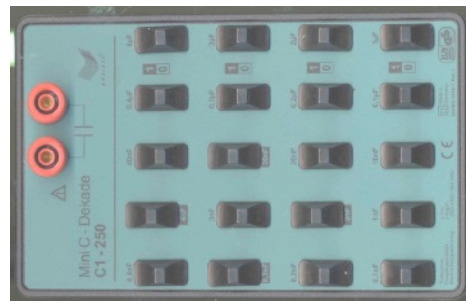
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n A(n\omega) \sin(n\omega t + \varphi(n\omega))$$

...qui est la représentation de Fourier du signal périodique de période T présent à la sortie $u_s(t)$.

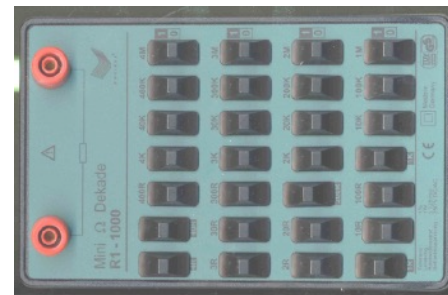
MONTAGE DU CIRCUIT RCL SERIE



L



C

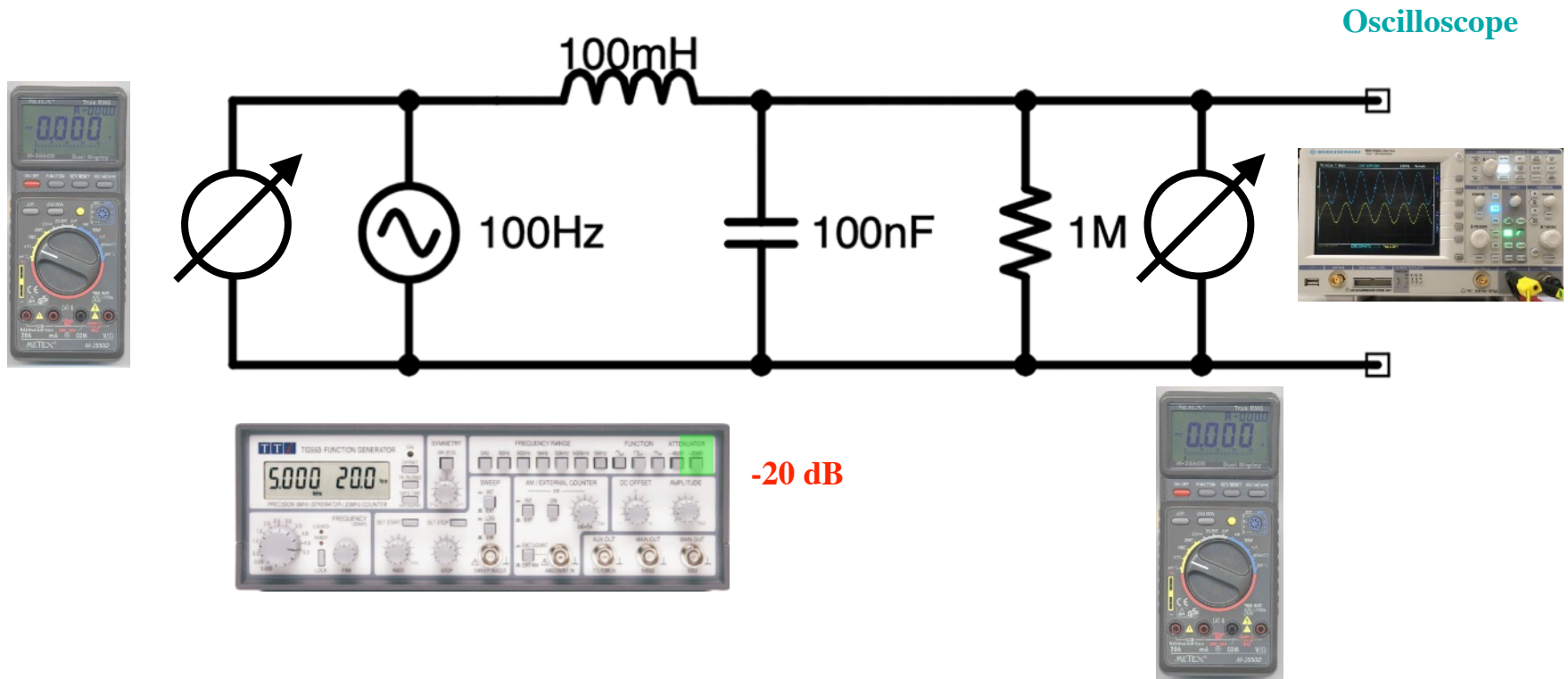


R

MONTAGE DU CIRCUIT RCL SERIE

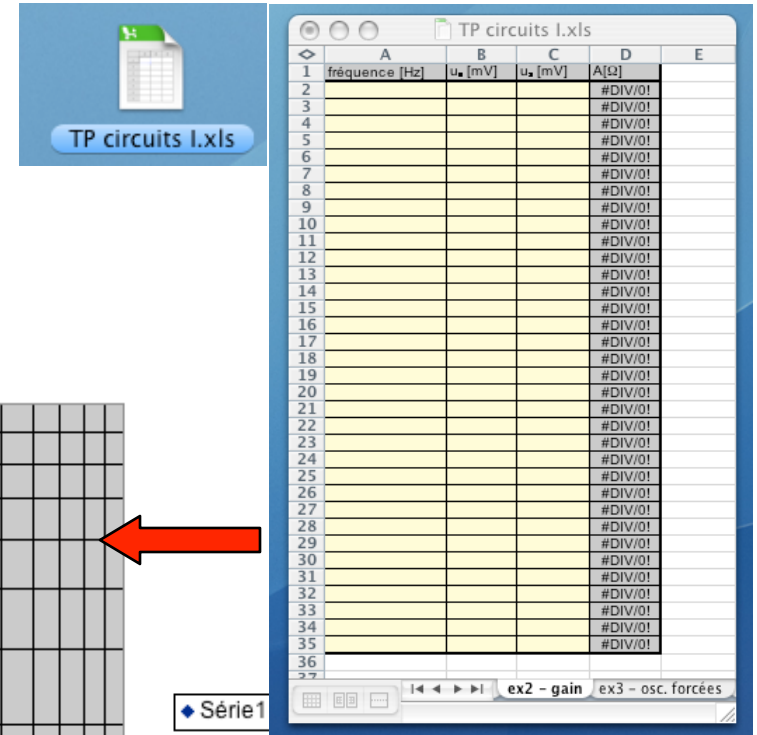
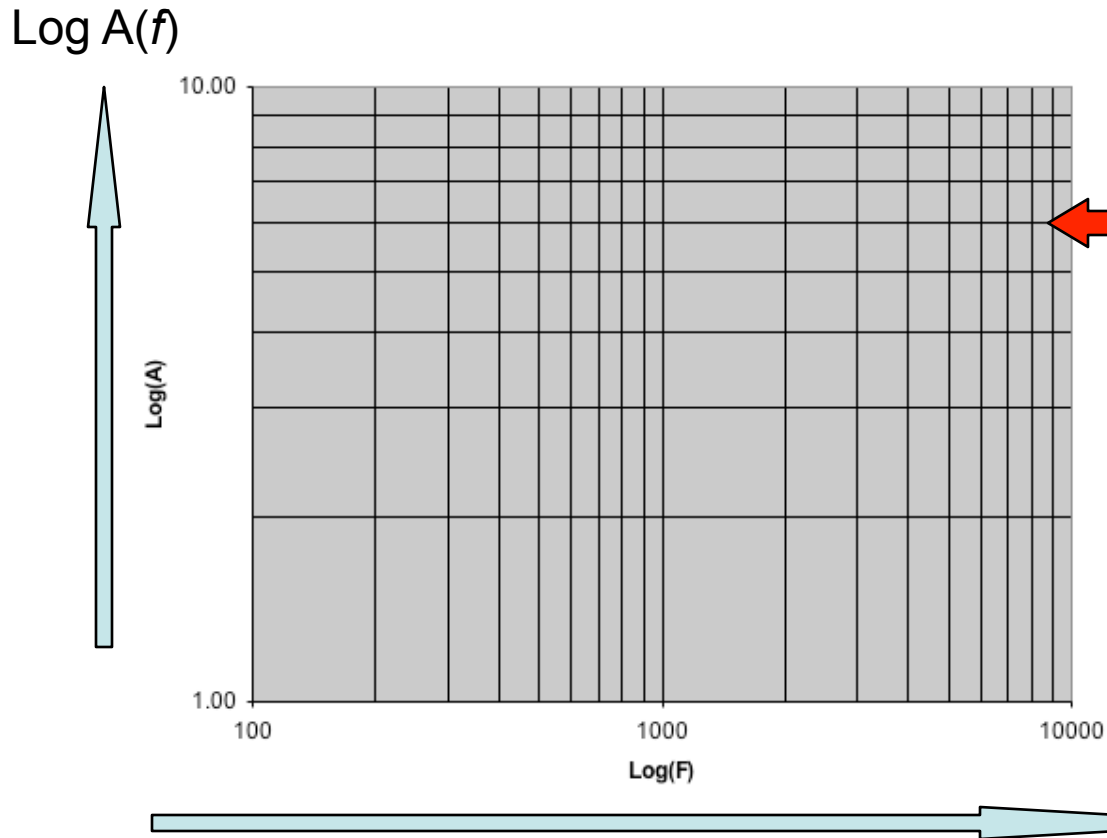
Effectuez le montage suivant avec $L=0,1\text{ H}$ et $C=0,1\text{ }\mu\text{F}$ $R=1\text{ M}\Omega$. La sortie du générateur de fonction doit être commutée sur **impédance 50Ω** , et sur **gain -20 dB** .

(note : il est nécessaire de respecter les codes de couleur pour les fils de câblage !)



MESURE DE LA RESONANCE

Mesurez u_s et u_e et calculez $A(f)=u_s/u_e$ en oscillations forcées, en utilisant pour le signal d'entrée $u_e(t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f comprise entre 100 Hz et quelques kHz, et avec une tension de 200 mV RMS, pour $R=1\text{ M}\Omega$, et reportez les résultats dans un diagramme de Bode.



Observer sur l'oscilloscope le changement de phase entre u_s et u_e au passage de la résonance.

REPONSE PERMANENTE

Cherchez à l'aide de l'oscilloscope la résonance sur $A(f)=u_s/u_e$ en oscillations forcées, en utilisant pour le signal d'entrée $u_e(t)$ un signal sinusoïdal avec une tension de 200 mV RMS, pour

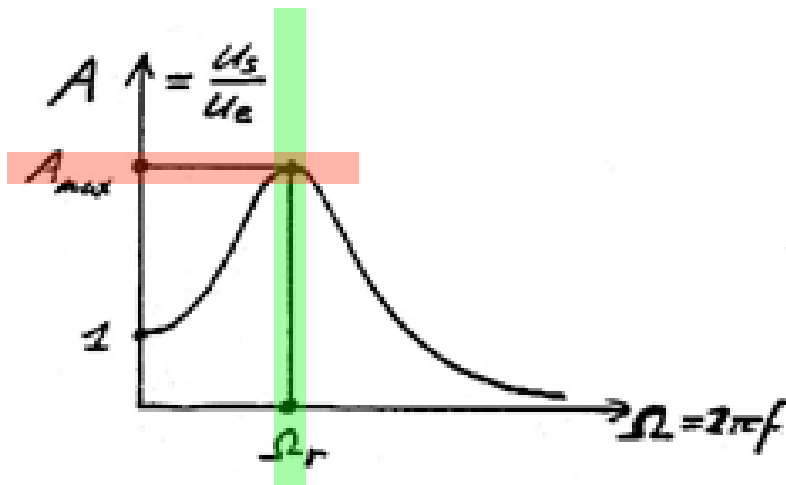
R= 1 MΩ, 100 kΩ, 10 kΩ, 5 kΩ, 2 kΩ,

et 500 Ω. Pour chaque cas, mesurez, trouvez avec les voltmètres et l'oscilloscope la fréquence de résonance f_r et $A_{\max}$, et calculez λ et ω_0 .

TP circuits I.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H
	R[Ω]	fréquence[Hz]	u_e [mV]	u_s [mV]	$A_{\max}$	λ	ω	
1	1.00E+06				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
2	1.00E+05				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
3	1.00E+04				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
4	1.00E+03				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
5	5.00E+02				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
6	2.00E+02				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
7	5.00E+01				#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
8								

ex3 - osc. forcées ex4 - osc. libres ex5 - comparaison avec théorie



$$\lambda = \Omega_r \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{A_{\max}^2}{A_{\max}^2 - 1}} - 1 \right]}$$

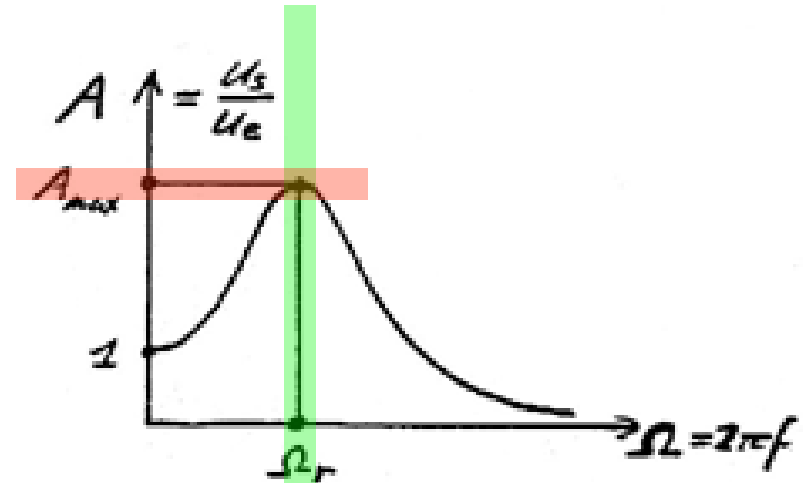
$$\omega_0 = \sqrt{\Omega_r^2 + 2\lambda^2}$$

Exercice: essayer d'établir ces formules !

REPONSE PERMANENTE

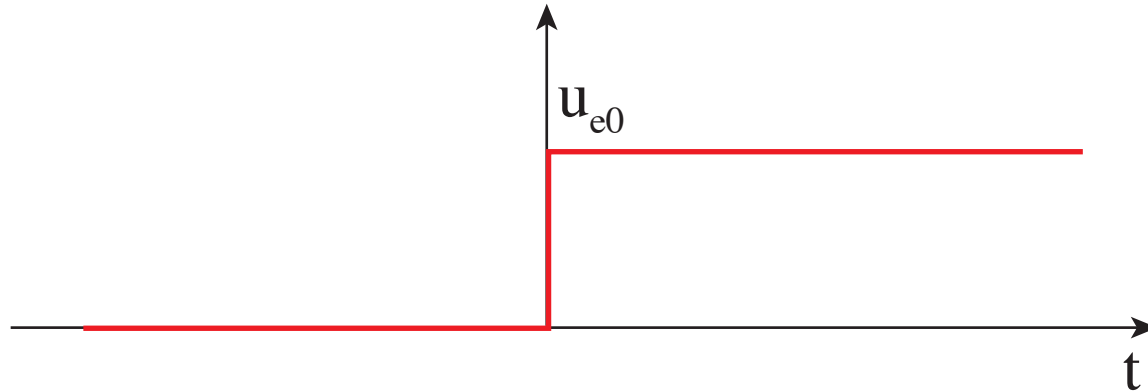
Cherchez à l'aide de l'oscilloscope la résonance sur $A(f)=u_s/u_e$ en oscillations forcées, en utilisant pour le signal d'entrée $u_e(t)$ un signal sinusoïdal avec une tension de 200 mV RMS, pour **R= 1 MΩ, 100 kΩ, 10 kΩ, 5 kΩ, 2 kΩ, et 500 Ω**. Pour chaque cas, mesurez, trouvez avec les voltmètres et l'oscilloscope la fréquence de résonance f_r et A_{max} , et calculez λ et ω_0 .

R[Ω]	fréquence[	u_e [mV]	u_s [mV]	A_{max}	λ	ω
1.00E+06	1589	0.023	1.521	66.13043	75.49129	9984.258
1.00E+05	1588.00	0.032	1.337	41.78125	119.4262	9978.833
1.00E+04	1584.00	0.069	0.605	8.768116	570.318	9984.901
5.00E+03	1581.00	0.080	0.377	4.7125	1072.277	10048.5
2.00E+03	1581.00	0.090	0.177	1.966667	2821.305	10704.78
5.00E+02	1581.00	0.10	0.048	0.494845	#NUM!	#NUM!



SOLUTIONS TRANSITOIRES (oscillations libres)

Ces différentes solutions transitoires peuvent être mises en évidence très simplement si, à l'instant $t=0$, on passe d'une tension d'entrée nulle à une tension $u_e(t) = u_{e0}$.



La solution transitoire de l'équation différentielle peut prendre trois formes:

Cas $\lambda^2 < \omega_0^2$: **amortissement faible** $\left(R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$

$$u_s(t) = C \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi)$$

(oscillateur amorti)

C, φ : constantes d'intégration avec

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

SOLUTIONS TRANSITOIRES (oscillations libres)

Cas $\lambda^2 = \omega_0^2$: **amortissement critique**

$$\left(R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

$$u_s(t) = e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t)$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} C_1, C_2 : \text{constantes d'intégration} \end{array} \right.$

Cas $\lambda^2 > \omega_0^2$ **amortissement fort, suramortissement**

$$\left(R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

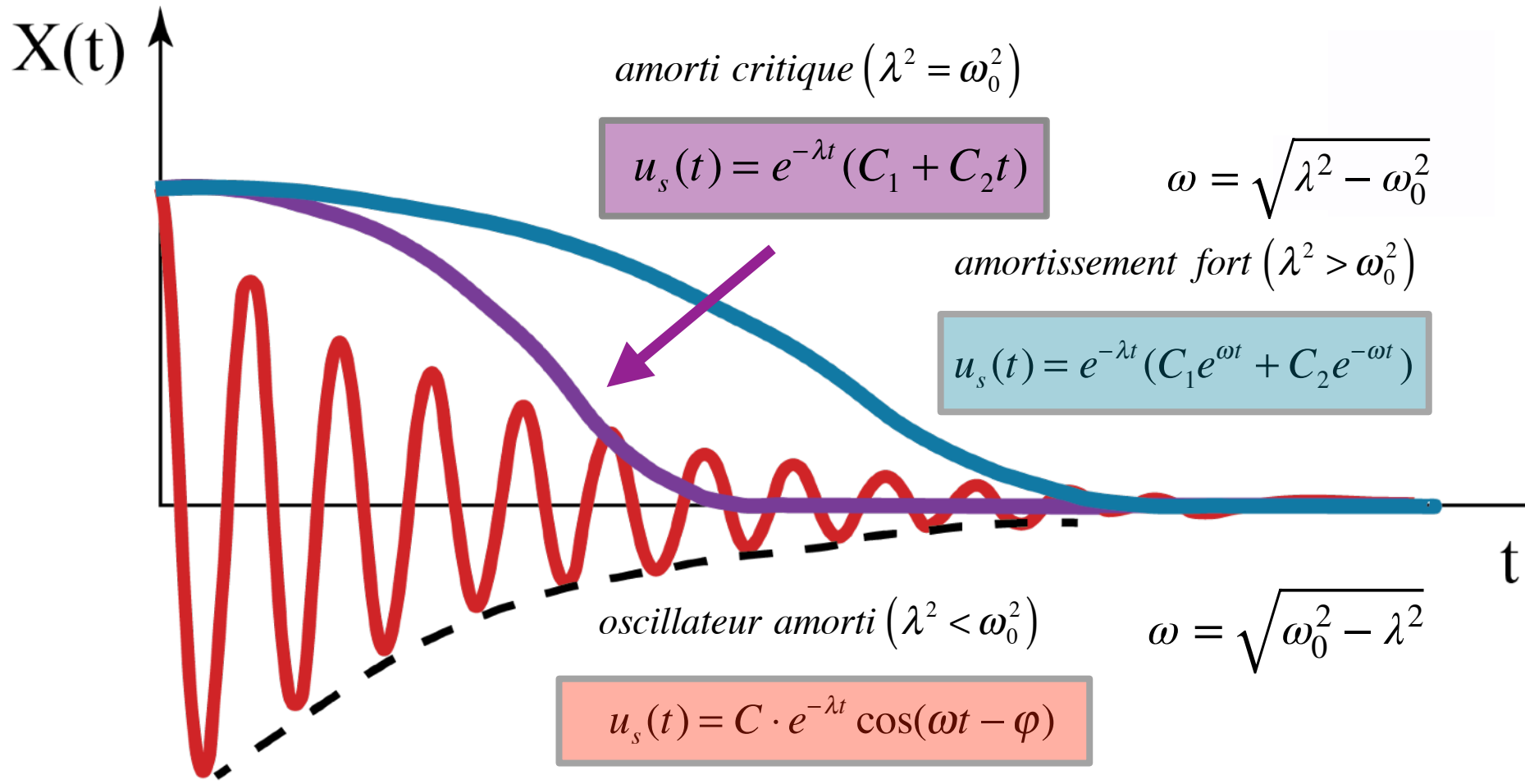
$$u_s(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t})$$

(mouvement non périodique)

avec $\left\{ \begin{array}{l} C_1, C_2 : \text{constantes d'intégration} \\ \omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{array} \right.$

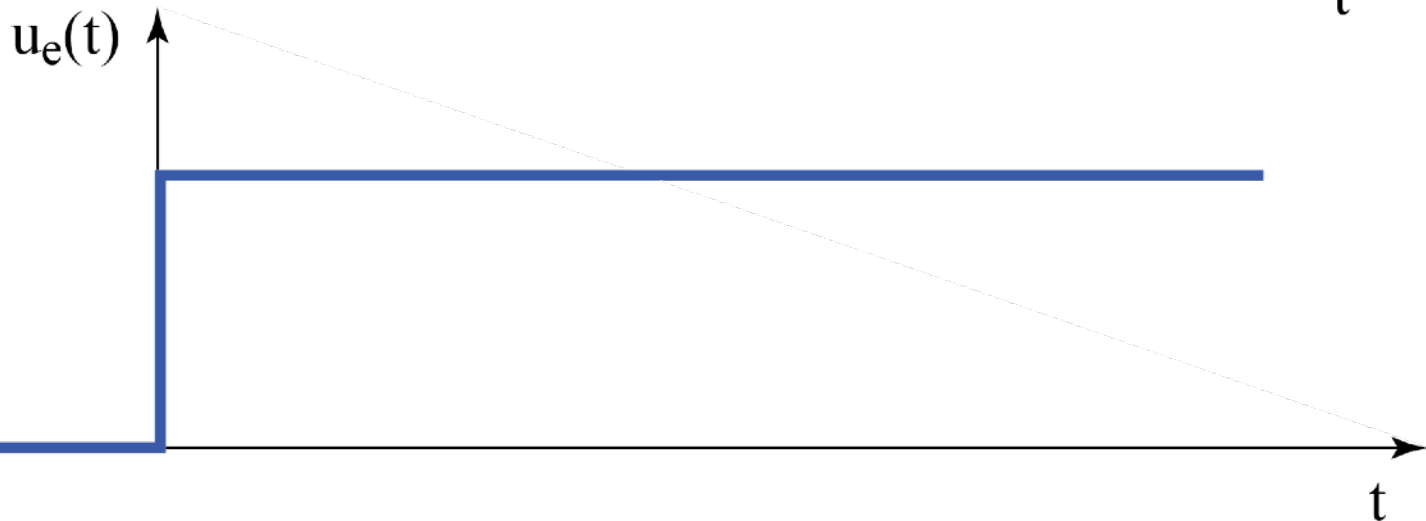
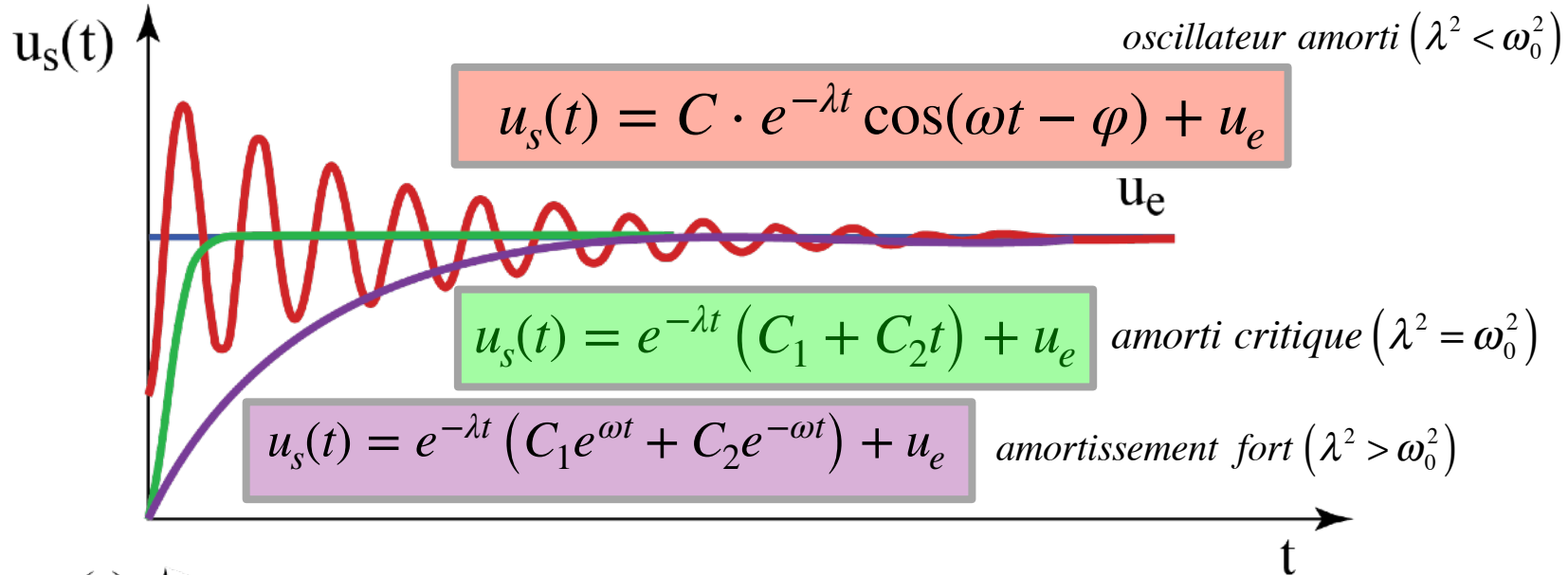
SOLUTIONS TRANSITOIRES (oscillations libres)

Les solutions de l'équation de l'oscillateur **libre** s'expriment graphiquement par les allures suivantes :



SOLUTIONS TRANSITOIRES (oscillations libres)

Dans l'équivalent électrique de l'oscillateur **libre** on étudie la réponse à un saut de tension : la position stable se situe au niveau de la tension d'entrée u_e



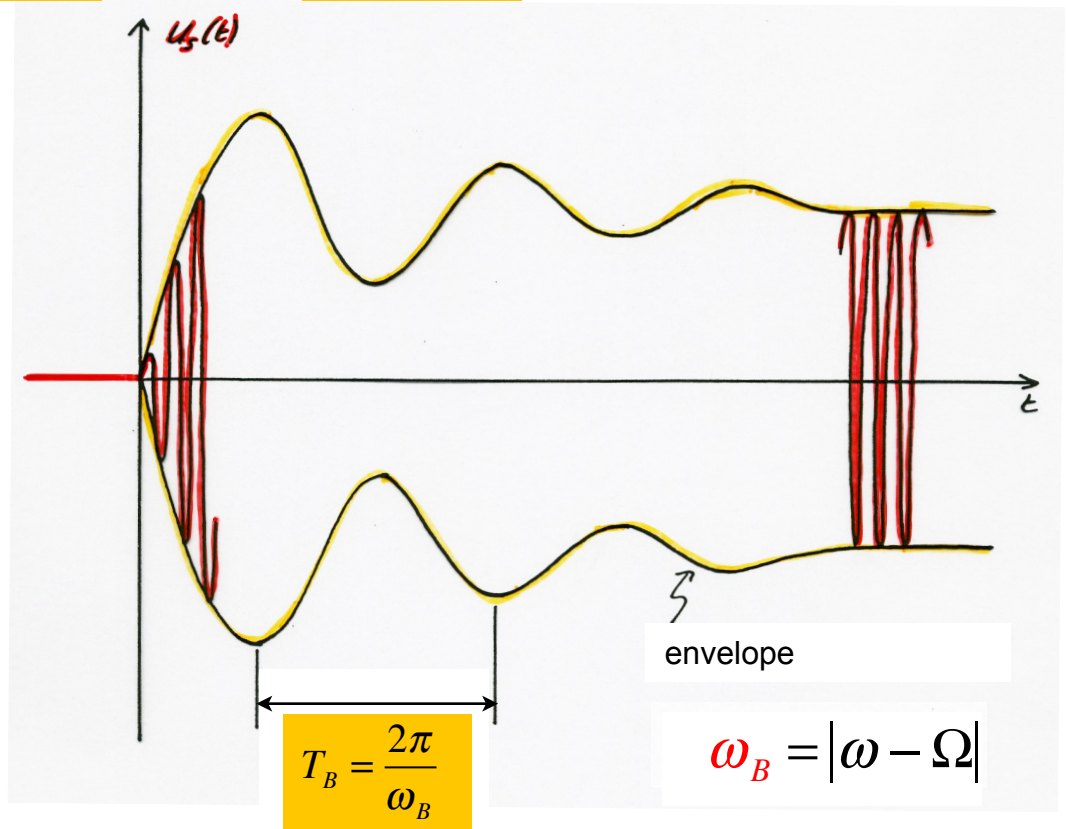
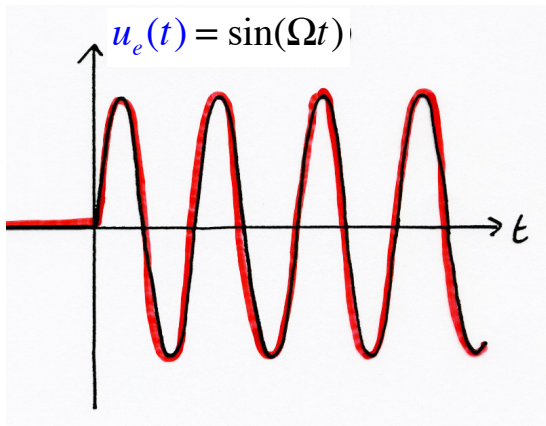
BATTEMENTS

Dans le cas d'amortissement faible, l'enclenchement de l'oscillation forcée à l'instant $t=0$ peut conduire à l'apparition **d'un régime transitoire de battements** entre la solution transitoire et la solution permanente, car

$$u_s(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t + \psi) + Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi)$$

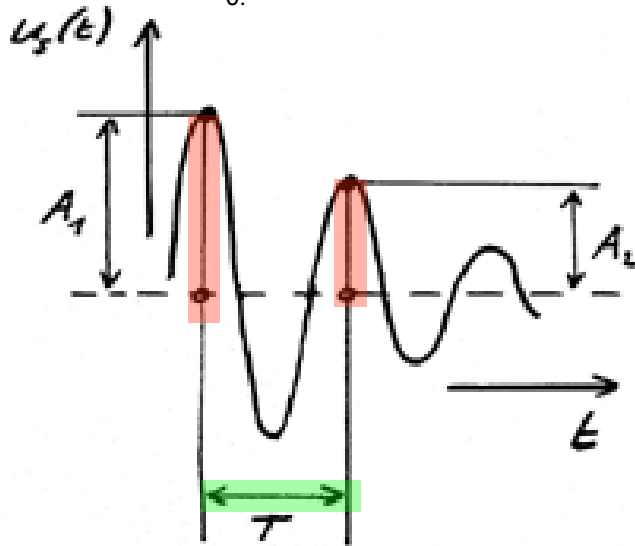
stationnaire

transitoire



OSCILLATIONS LIBRES

Observez avec l'**oscilloscope digital** les oscillations libres amorties, en utilisant un signal d'entrée $u_e(t)$ de forme carrée, de fréquence f voisine de 10 Hz, et d'amplitude fixe voisine de 200 mV RMS, pour **$R = 1\text{ M}\Omega$, $100\text{ k}\Omega$, $10\text{ k}\Omega$, $5\text{ k}\Omega$, $2\text{ k}\Omega$, et $500\text{ }\Omega$** . Pour chaque cas, mesurez avec les curseurs de l'oscilloscope la période T et deux amplitudes successives A_1 et A_2 , et calculez les grandeurs λ et ω_0 .



- Il est conseillé de synchroniser l'oscilloscope sur le canal du signal carré (CH1).
- Vérifiez que la Source des mesures pour les curseurs correspond au canal de sortie (CH2 en principe).
- Finalement il sera utile de mesurer en mode DC autrement dit admettre la composante continue du signal. On peut le sélectionner sur "Menu"

TP circuits I.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	R[Ω]	A1 [V]	A2 [V]	T [s]	λ	ω ₀		
2	1.00E+06				#DIV/0!	#DIV/0!		
3	1.00E+05				#DIV/0!	#DIV/0!		
4	1.00E+04				#DIV/0!	#DIV/0!		
5	5.00E+03				#DIV/0!	#DIV/0!		
6	2.00E+03				#DIV/0!	#DIV/0!		
7	5.00E+02				#DIV/0!	#DIV/0!		
8								

ex4 - osc. libres ex5 - comparaison avec t

Prêt

$$\lambda = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + \lambda^2}$$

Exercice: essayer d'établir ces formules !



ROHDE & SCHWARZ

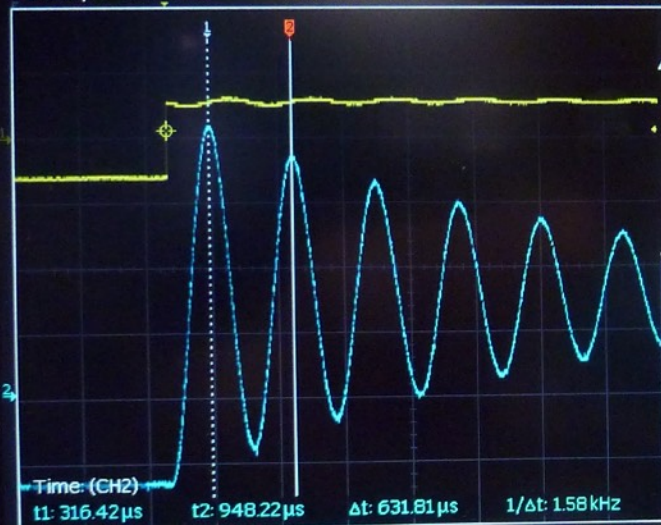
HMO1002 Series

1 GSa/s / 1 MB Oscilloscope

TB: 500 μ s T: -116 ms

CH1: 65 mV / DC

976.56 kSa



CURSOR

MEASURE TYPE

Time

AUTOM. SOURCE

On Off

SOURCE

CH2

SET TO TRACE

SET TO SCREEN

GLUE TO TRACE

CURSOR/MENU

COARSE FINE

SELECT

KEYPAD

INTENS PERSIST

SCROLL BAR

CURSOR MEASURE

ANALYZE

GENERAL

SAVE RECALL

AUTO SET

FFT

QUICK VIEW

SETUP

HELP

FILE PRINT

DISPLAY

VERTICAL

POSITION

CH1

CH2

UTIL

POD

VOLTS/DIV

MATH

REF

BUS

MENU

TRIGGER

LEVEL

AUTO NORM

SINGLE

SLOPE

TYPE

SLOPE

SOURCE

FILTER

ACQUIRE

HORIZONTAL

POSITION

SET CLR

MENU

RUN STOP

TIME/DIV

ZOOM

ACQUIRE

CH1

CH2

EXT TRIG IN

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

USE RECOMMENDED PROBE ONLY

PATTERN GENERATOR

PROBE COMP.

S0 S1 S2 S3

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

CH1

CH2

EXT TRIG IN

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

USE RECOMMENDED PROBE ONLY

PATTERN GENERATOR

PROBE COMP.

S0 S1 S2 S3

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

CH1

CH2

EXT TRIG IN

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

USE RECOMMENDED PROBE ONLY

PATTERN GENERATOR

PROBE COMP.

S0 S1 S2 S3

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

CH1

CH2

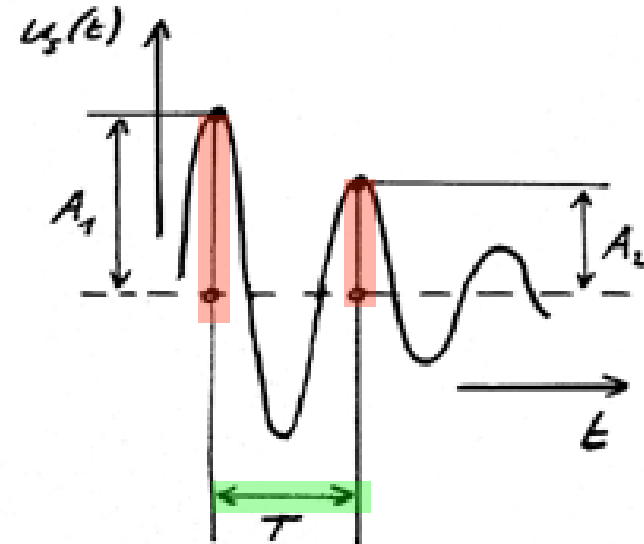
EXT TRIG IN

1 M Ω 16 pF max. 100 Vpk

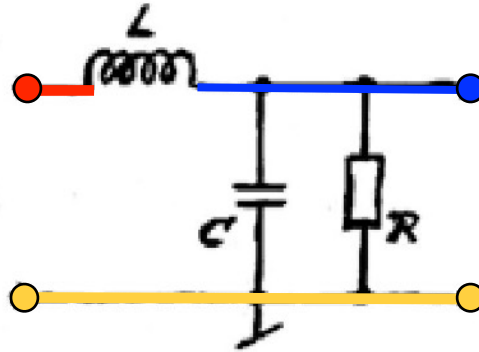
OSCILLATIONS LIBRES

Observez avec l'**oscilloscope digital** les oscillations libres amorties, en utilisant un signal d'entrée $u_e(t)$ de forme carrée, de fréquence f voisine de 10 Hz, et avec une tension de 200 mV RMS, pour **$R = 1\text{ M}\Omega$, $100\text{ k}\Omega$, $10\text{ k}\Omega$, $5\text{ k}\Omega$, $2\text{ k}\Omega$, et $500\text{ }\Omega$** . Pour chaque cas, mesurez avec les curseurs de l'oscilloscope la période T et deux amplitudes successives A_1 et A_2 , et calculez les grandeurs λ et ω_0 .

$R[\Omega]$	A1 [V]	A2 [V]	T [s]	λ	ω_0
1.00E+06	0.248	0.204	6.50E-04	300.48	9671.11
1.00E+05	0.252	2.00E-01	6.30E-04	366.84	9980.05
1.00E+04	0.216	1.36E-01	6.30E-04	734.32	10000.31
5.00E+03	1.84E-01	8.40E-02	6.31E-04	1242.66	10034.74
2.00E+03	0.108	2.00E-02	6.31E-04	2672.58	10309.93
5.00E+02				#DIV/0!	#DIV/0!



SIMULATION DU CIRCUIT



Simulation 100 Hz

<http://tinyurl.com/s4cdf7f>

Simulation 3 KHz

<https://tinyurl.com/ygawf76u>

Simulation Oscillateur libre

<https://tinyurl.com/ygrvwahf>